

CB-401

PARABOLOIDE ELÍPTICO: UN ANÁLISIS DESDE LA TEORÍA DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Tito Nelson Peñaloza Vara – Jesús Victoria Flores Salazar – Verónica Neira Fernández
a20123933@pucp.pe – jvflores@pucp.pe – vneira@pucp.pe

Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú – Maestría en Enseñanza de las
Matemáticas/línea de investigación-TecVEM-MEM– Perú

Núcleo temático: Investigación en educación matemática

Modalidad: CB

Nivel educativo: Terciario o Bachillerato (16 a 18 años)

Palabras clave: Paraboloide elíptico; aprehensiones; registro gráfico.

Resumen

Presentamos en la comunicación breve, un recorte de la investigación del primer autor que tiene por objetivo analizar el proceso de visualización del paraboloide elíptico en estudiantes de Arquitectura quienes cursan una primera asignatura de matemáticas, por medio de una secuencia de actividades con el uso del Geogebra. Tomamos como marco teórico aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y nos centramos en el registro gráfico del paraboloide elíptico. En cuanto a la metodología nos basamos en aspectos de la Ingeniería Didáctica. Presentamos el desarrollo de una actividad realizada por dos estudiantes y observamos que ambas efectuaron conversiones del registro gráfico al algebraico y tratamientos en el registro gráfico. Además, evidenciamos que desarrollaron aprehensiones en el mismo registro y que la articulación de dichas aprehensiones está en proceso.

Consideraciones iniciales

En nuestra labor docente de un primer curso de matemáticas para estudiantes de arquitectura, hemos percibido que entre las dificultades presentes en los diversos objetos matemáticos estudiados, sobresale el tema *superficies cuádricas* cuyas tareas para nuestros propósitos se dan en dos grupos:

- Dada la ecuación de la cuádrica, graficar la superficie mediante cortes o secciones.
- Dada la superficie representada gráficamente, obtener su ecuación.

Los estudiantes de cursos más avanzados tal como cálculo multivariable por ejemplo, conocen las formas canónicas de la ecuación de ciertas superficies cuádricas, y pueden identificar la ecuación cartesiana de una superficie dada su gráfica y viceversa, así como

reconocer puntos importantes en la gráfica tales como centros, vértices, ejes principales, entre otros, no presentándose esta particularidad en estudiantes de arquitectura de un primer curso de matemáticas, ya que ellos la representan con ayuda de las secciones cónicas, es decir, mediante cortes de la superficie cuádrica con planos paralelos o perpendiculares al eje principal de la cuádrica.

La dificultad ocurre cuando el estudiante debe obtener la ecuación cartesiana de la superficie a partir de su representación gráfica, la falla puede darse en la identificación del par de variables cartesianas que representan algebraicamente una sección cónica. En el plano cartesiano XY , por ejemplo, si el eje focal de una parábola es paralelo al eje Y , su ecuación tiene la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k), z=w$, pero si una parábola está graficada en un plano paralelo al plano YZ y su eje focal es paralelo al eje Z , su ecuación tiene la forma $(y-k)^2 = 4p(z-w), x=h$, pudiendo el estudiante erróneamente indicar la forma $(z-w)^2 = 4p(y-k), x=h$, la cual corresponde a la parábola con eje focal paralelo al eje Y , así como el signo del parámetro p dependiendo de la orientación o sentido de abertura de la parábola, la cual presenta seis posibilidades en R^3 .

Investigaciones tales como las de Salazar, Gaita y Saravia (2013), manifiestan que “existen preocupaciones cognitivas con relación a la matemática o a los significados construidos para su enseñanza cuando se desarrollan actividades mediadas por ambientes tecnológicos” (p. 7168). Ingar (2014) en su estudio de visualización de los valores máximos y mínimos locales en funciones de varias variables, establece que “las representaciones gráficas son empleadas en las definiciones de manera icónica” (p. 19), y por ello el software *Mathematica* puede construir significados en los estudiantes mediante una secuencia de actividades. Por ello, creemos que un software de representación dinámica, tal como el software *Geogebra 3D*, puede permitir realizar modificaciones y transformaciones en la representación gráfica de una superficie cuádrica, con la finalidad de reconocer formas gráficas de puntos y curvas, y así obtener valores de coordenadas y ecuaciones de dichos elementos que permitan al estudiante obtener la ecuación de la superficie, en particular el paraboloide.

Según estos criterios y otras consideraciones, Peñaloza (2016) formuló la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo se realiza el proceso de visualización del paraboloide en estudiantes

de Arquitectura en una secuencia didáctica mediada por el Geogebra? (p. 45). Para ello, el autor consideró algunos aspectos de visualización tomados de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), como los más adecuados para establecer el marco teórico de investigación lo cual, conjuntamente con el software Geogebra 3D como mediador en la secuencia didáctica, y bajo la metodología de la ingeniería didáctica de Artigue (1995), poder responder la pregunta de investigación.

Marco teórico

Según Duval (1993) “no es posible estudiar los fenómenos relacionados al conocimiento sin recurrir a la noción de representación”. En ese contexto semiótico, los objetos matemáticos son representados mediante símbolos propios del registro al cual pertenecen, los cuales, según el autor poseen tres actividades cognitivas fundamentales: *formación*, *conversión* y *tratamiento*. (Duval, 1995, p. 42). El autor, además, clasificó dichos registros en figural, gráfico, lenguaje natural, algebraico, tabular, entre otros. Peñaloza (2016) consideró para su estudio tres registros de representación semiótica del paraboloide: *lenguaje natural*, *gráfico* y *algebraico*.

Duval afirma que para que un conocimiento o un saber matemático pueda ser puesto en funcionamiento, es necesario que el sujeto coordine por lo menos dos registros de representación semiótica. Dicha coordinación requiere realizar tratamientos en un mismo registro, y conversión de un registro a otro distinto. En la figura 1 observamos los registros de representación semiótica del paraboloide circular, así como los tratamientos en el registro algebraico y conversiones entre dichos registros.

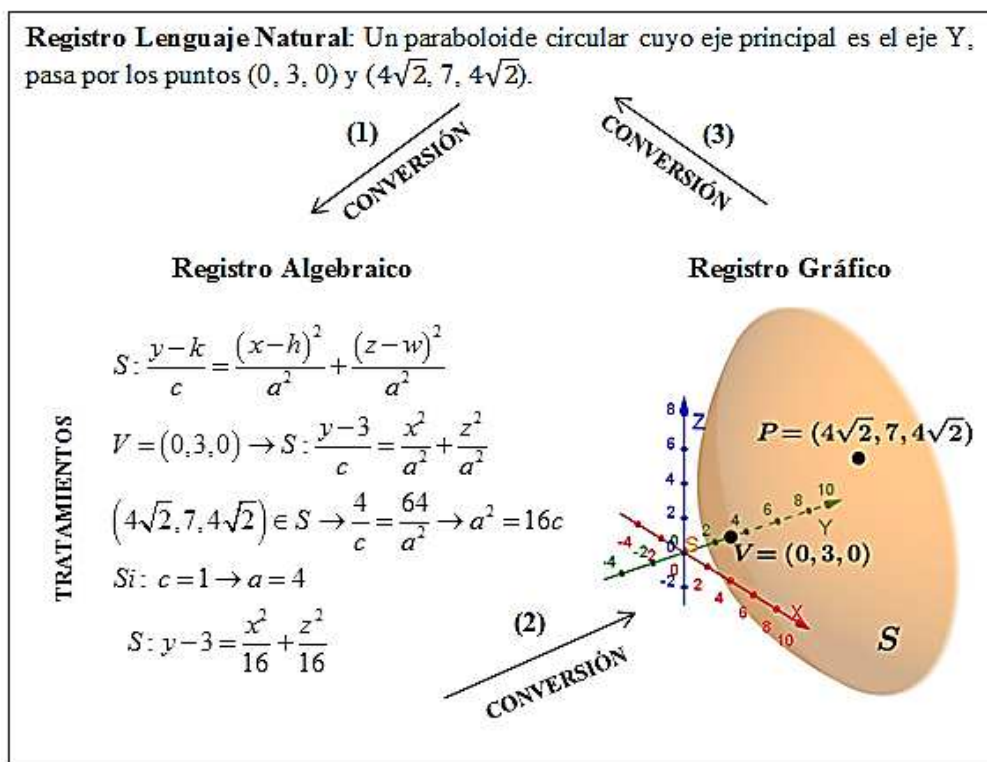


Figura 1. Transformación de una Representación Semiótica en otra.

Fuente: Peñaloza (2016, p.28)

En la figura 1 observamos que la representación gráfica del paraboloide requiere previamente de su representación algebraica a partir del cual, ya sea por medio del lápiz y papel o por algún software de representación, puede ser graficado en un medio físico o tecnológico. La conversión del registro gráfico al registro algebraico, requiere realizar tratamientos en el registro gráfico, lo cual creemos que no es factible de ser realizado en un medio tradicional tal como el lápiz y papel, no obstante el software de representación tal como el Geogebra 3D permite realizar ciertas modificaciones en dicho registro, variando la disposición de la representación respecto del observador, desarrollándose en él *aprehensiones* las cuales, según Duval, permiten comprender al objeto representado, e inferir otras características y propiedades para resolver un problema determinado.

Peñaloza (2016) identificó las *aprehensiones* del paraboloide en el registro gráfico:

- **Aprehensión perceptiva:** Se relaciona directamente con los conocimientos previos que posee el sujeto, ve la representación gráfica e identifica el objeto representado.

- **Aprehensión secuencial:** El sujeto comprende que para representar un objeto o un conjunto de ellos, debe realizar una serie de pasos secuenciales. En el caso de representar objetos en la Vista Gráfica del software Geogebra, cada paso se realiza ya sea mediante el ingreso en la Barra de Entrada de la sintaxis de un comando propio del software, o mediante sus herramientas en combinación conjunta con la Barra de Entrada y el mouse.
- **Aprehensión discursiva:** Se da cuando el sujeto infiere otras propiedades de la representación gráfica del objeto, no indicadas de manera explícita.
- **Aprehensión operatoria:** Se manifiesta cuando el sujeto realiza *modificaciones* en la representación gráfica del objeto, con la finalidad de obtener información que le permita reconocer elementos propios de dicho objeto, y poder obtener sus representaciones algebraicas, favoreciendo la conversión entre dichos registros.

Peñaloza (2016), considerando las modificaciones establecidas por Duval en el registro figural, identificó las modificaciones en el registro gráfico del paraboloide las cuales son: *óptica* (acercamiento / alejamiento) y *posicional* (traslación / rotación), así como la deconstrucción dimensional la cual permite descomponer la representación gráfica de un primer paraboloide (primario) en sus elementos constitutivos, los cuales permitirán representar un segundo paraboloide (secundario) con la misma forma que el primario, pero en una distinta posición en R^3 .

Peñaloza (2016) identificó los elementos constitutivos del paraboloide que permiten representarlo gráficamente, los cuales Duval denomina *variables visuales*. Las representaciones algebraicas de las variables visuales Duval las denomina *unidades significantes* en el registro algebraico. En la figura 2 observamos las variables visuales del paraboloide agrupados según la dimensión a la cual pertenecen.

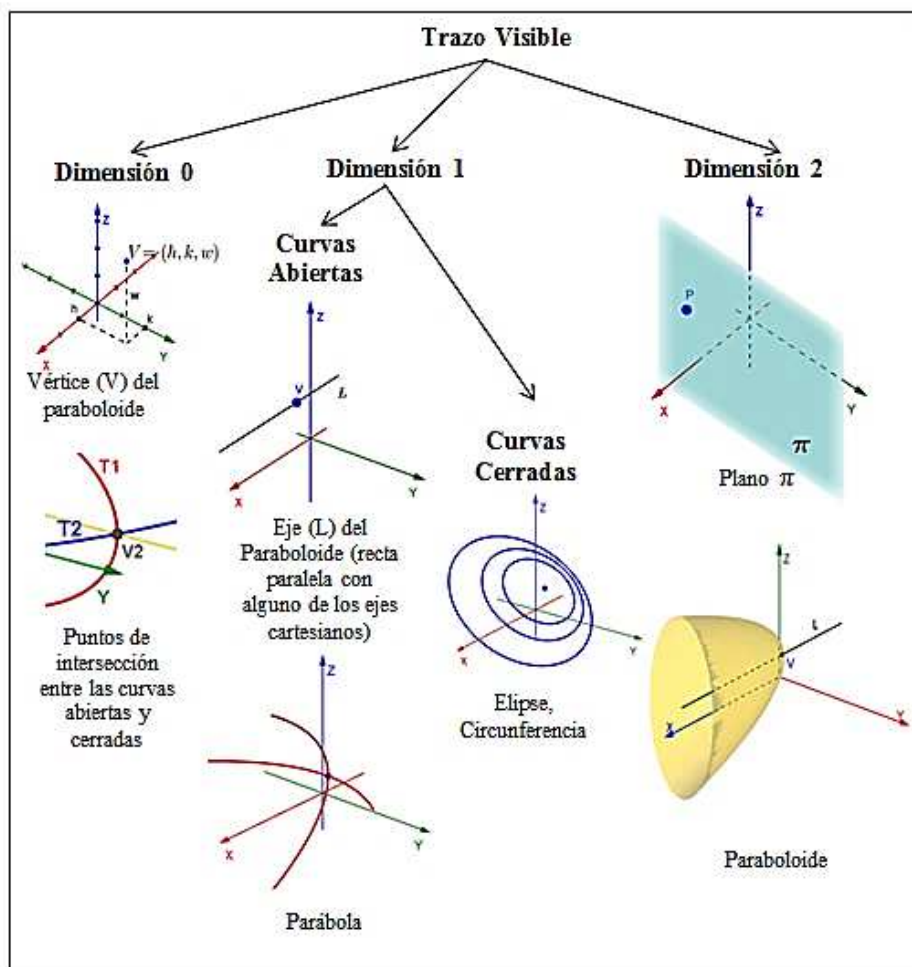


Figura 2. Clasificación de variables visuales del paraboloide.

Fuente: Peñaloza (2016, p. 38)

Las unidades significantes de cada variable visual representada en la figura 2, pueden expresarse algebraicamente mediante sus coordenadas, expresiones simbólicas, ecuaciones, o un sistema de ecuaciones de 2×2 .

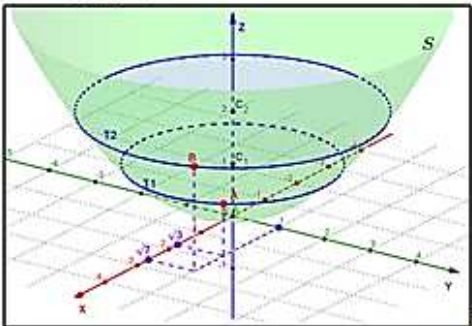
Creemos que el desarrollo de la aprehensión operatoria en el registro gráfico mediante sus modificaciones ópticas y posicionales, permiten el reconocimiento de las variables visuales del paraboloide, así como realizar tratamientos en dicho registro para obtener sus unidades significantes, y así realizar la conversión del registro gráfico al registro algebraico. La articulación entre todas las aprehensiones desarrolladas por el sujeto es lo que Duval denomina *visualización*, y para evidenciar cómo visualizan dos estudiantes de arquitectura de un primer curso de matemáticas, presentamos a continuación parte de una de las

actividades de la experimentación en el estudio de visualización del paraboloides de Peñaloza (2016).

Experimentación

Obtención de la ecuación de un paraboloides dada su representación gráfica.

Abra el archivo: *Actividad_2.ggb*



a) → Los puntos C_1 y C_2 son centros de las curvas cerradas $T1$ y $T2$, respectivamente. Escriba las coordenadas de los puntos A y B (valores exactos), y explique su procedimiento.

b) → Identifique la forma de las curvas cerradas $T1$ y $T2$, y luego escriba sus ecuaciones. Justifique su procedimiento.

c) → Realice cortes de S con los planos $x=0$ y $y=0$, e indique qué herramienta de Geogebra utilizó. ¿Qué forma tienen los cortes obtenidos? Explique.

d) → Escriba las ecuaciones de los dos cortes obtenidos en la parte (c). Explique su procedimiento.
Sugerencia: Para obtener puntos de paso de cada corte pedido, puede utilizar los puntos de intersección de dichos cortes con las curvas $T1$ o $T2$.

e) → Con las ecuaciones de los dos cortes obtenidos en la parte (d) y una de las ecuaciones de las curvas cerradas ($T1$ o $T2$) obtenidas en la parte (b), obtenga la ecuación de la cuádrica S .

Figura 3. Clasificación de variables visuales del paraboloides.

Fuente: Peñaloza (2016, pp. 158 – 159)

Las estudiantes Alexandra y Jacinta, mediante la herramienta *Rota la Vista Gráfica 3D*, obtuvieron las coordenadas de los puntos A y B , e identificaron las formas de las curvas cerradas $T1$ y $T2$ las cuales representan circunferencias contenidas en los planos paralelos $z=1$, $z=2$, tal como observamos en las figuras 3 y 4.

$A(\sqrt{7}, 1, 2)$ Primero vi los puntos que están
 en color morado en la imagen
 $B(\sqrt{3}, 1, 1)$ para saber, después deslizando
 la figura hasta que se vea recta. y se
 vea como ortogonal.
 Ahí me saqué los puntos A y B en
 líneas rectas y me sale como
 vale 2 en el punto A y B.

Figura 3. Coordenadas de los puntos A y B obtenidas por Jacinta.
 Fuente: Peñaloza (2016, p. 116)

1) seleccionar los puntos ir a la barra de
 y elegir el nombre y el valor.
 ya Tenemos los valores exactos
 de las componentes
 $A = (\sqrt{3}, 1, 1)$
 $B = (\sqrt{7}, 1, 2)$

Figura 4. Coordenadas de los puntos A y B obtenidas por Alexandra.
 Fuente: Peñaloza (2016, p. 118)

Las estudiantes, desarrollaron las aprehensiones *perceptiva* ya que reconocieron objetos representados y *operatoria* al realizar rotaciones en la Vista Gráfica 3D. La obtención del radio de cada circunferencia $T1$ y $T2$ y su ecuación está descrita en las figuras 5 y 6.

1) etiquetar los nombres y valores de C_1, C_2 que
 son los centros para formar la ecuación
 de la circunferencia formadas
 con la vista desde arriba, se encuentra el radio
 $C_1: x^2 + y^2 = r^2$
 $z=1 \quad x^2 + y^2 = 3$
 $C_2: x^2 + y^2 = (\sqrt{7})^2$
 $z=2 \quad x^2 + y^2 = 7$

Figura 5. Ecuaciones de las curvas $T1$ y $T2$ obtenidas por Alexandra.
 Fuente: Peñaloza (2016, p. 118)

En la figura 5 observamos que Alexandra no obtuvo los valores correctos de cada radio. Los valores numéricos $\sqrt{3}$ y $\sqrt{7}$ no corresponden a los radios de las circunferencias representadas por $T1$ ni $T2$, son las abscisas de las coordenadas de los puntos A y B, siendo los radios 2 y $2\sqrt{2}$ de $T1$ y $T2$, respectivamente. Por otro lado, en la figura 6 notamos que Jacinta pudo obtener el valor del radio de $T2$ mediante la herramienta *Distancia* de Geogebra, ya que midió el radio de dicha circunferencia en un segmento desde el centro a un punto de

la curva según su explicación. No obstante el valor es 2.83 y no $2\sqrt{2}$, ya que se pedía el valor exacto.

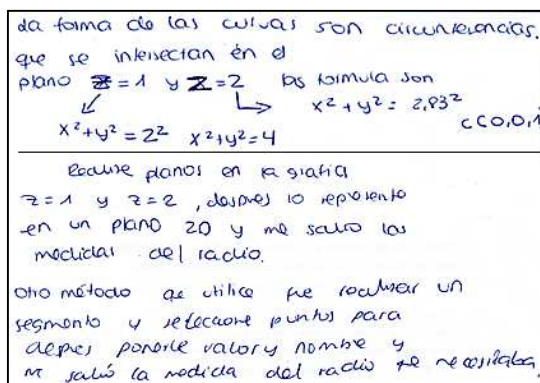


Figura 6. Ecuaciones de las curvas $T1$ y $T2$ obtenidas por Jacinta.
 Fuente: Peñaloza (2016, p. 117)

Conclusiones

En el análisis de la actividad, vemos que las estudiantes desarrollaron sus aprehensiones *perceptiva* al reconocer la forma de la variable visual circunferencia, y asociarla con su correspondiente unidad significativa ecuación, *operatoria* al realizar modificaciones en el registro gráfico para obtener valores numéricos de los coeficientes y constantes de las ecuaciones, y *discursiva* en el caso de Jacinta al justificar la obtención del valor del radio de $T2$, por medio de la definición de la circunferencia. Todo ello implica que las estudiantes articularon sus aprehensiones, y la visualización está en proceso.

Agradecimientos

La presente comunicación breve ha sido posible gracias al apoyo de la Pontificia Universidad Católica del Perú especialmente de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas, línea de investigación TecVEM-MEM ya que es producto de la tesis del primer autor.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá. Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives Université Louis Pasteur*, I. R. E. M. de Strasbourg, 37– 64.

Duval, R. (1995). *Semiósis y pensamiento humano*. Myriam Vega Restrepo (Trad. 2011). Cali Colombia: Merlin I.D.

Ingar, K. (2014). *A Visualização na Aprendizagem dos Valores Máximos e Mínimos Locais da Função de Duas Variáveis Reais*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil.

Peñaloza, T. (2016). *Proceso de Visualización del Paraboloides en Estudiantes de Arquitectura Mediado por el Geogebra* Tesis (Maestría en Enseñanza de las Matemáticas) Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Salazar, J.V.F., Gaita, C. & Saravia, N. (2013). Un Estudio de Superficies con Mathematica. Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática - VII CIBEM. Sociedad de Educación Matemática del Uruguay, 7168 – 7175.